

Il triangolo vuoto

È dato un insieme di punti nel piano Cartesiano, in posizioni note. Si vuole determinare un triangolo di massima area, che abbia come vertici tre dei punti dati e non ne contenga nessun altro.

Formulare il problema e classificarlo.

Risolvere l'esempio descritto nel file TRIANGOLOVUOTO.TXT, discutendo ottimalità e unicità delle soluzioni trovate.

Esempio

Nella tabella 1 sono elencate le coordinate dei punti dati.

x	y
1	7
4	1
4	10
7	6
8	6
8	3
10	8

Tabella 1: Coordinate dei punti dati.

Soluzione

Dati. Indichiamo con n il numero di punti dati e con P l'insieme indicizzato dei punti. Indichiamo con (x_i, y_i) le coordinate cartesiane di ogni punto $i \in P$.

Per evitare di introdurre non-linearità nel modello, possiamo precalcolare l'ammissibilità e l'area di ogni possibile triangolo.

Per enumerare tutti i possibili triangoli, definiamo il loro insieme T , eliminando subito le simmetrie, in modo che ogni triangolo sia considerato una volta sola:

$$T = \{i \in P, j \in P, k \in P : i < j < k\}.$$

Per calcolare l'area di un triangolo a partire dalle coordinate dei suoi vertici, un modo è quello di usare la formula di Erone

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

dove p indica il semiperimetro del triangolo ed a, b e c le lunghezze dei suoi lati. Definiamo le distanze d tra coppie di punti:

$$d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad \forall i \in P, j \in P : i < j.$$

Il semiperimetro è quindi

$$p_{ijk} = \frac{d_{ij} + d_{jk} + d_{ik}}{2} \quad \forall (i, j, k) \in T$$

e l'area è

$$A_{ijk} = \sqrt{p_{ijk}(p_{ijk} - d_{ij})(p_{ijk} - d_{jk})(p_{ijk} - d_{ik})} \quad \forall (i, j, k) \in T.$$

Un altro modo per calcolare l'area è il determinante della matrice formata dai vettori di due lati, quando l'origine degli assi è posta nel loro vertice comune. Il determinante può essere positivo o negativo; l'area è metà del suo valore assoluto.

$$A_{ijk} = (y_k - y_i)(x_j - x_i) - (x_k - x_i)(y_j - y_i) \quad \forall (i, j, k) \in T.$$

Si noti che in entrambi i casi tutte queste operazioni sono svolte sui dati e quindi non influiscono sulla linearità o non-linearità del modello.

Si potrebbe anche precalcolare come dato binario se ogni punto sia interno o esterno ad ogni triangolo, ma questo richiederebbe $O(n^4)$ dati. Possiamo limitarci a calcolare se ogni punto k giace a destra o a sinistra della retta orientata da i a j per ogni coppia di punti (i, j) . Indichiamo questo dato con $u(i, j, k)$ e abbiamo $O(n^3)$ di questi dati. Se $(y_k - y_i)(x_j - x_i) - (x_k - x_i)(y_j - y_i)$ è positivo, allora $u(i, j, k)$ viene posto a 1 (k è a sinistra della retta orientata); se è negativo, $u(i, j, k)$ viene posto a -1 (k è a destra della retta orientata); se è nullo, $u(i, j, k)$ viene posto a 0 (k giace proprio sulla retta orientata). Se e solo se un punto h risulta dalla stessa parte rispetto a tutti e tre i lati di un triangolo (i, j, k) , allora è interno al triangolo. Quindi l'esistenza di un punto interno si riconosce dal fatto che $u[i, j, h] + u[j, k, h] + u[k, i, h]$ assume valore 3 o -3 .

Un altro modo è quello di calcolare le aree dei tre triangoli che hanno un vertice nel punto h e verificare se la loro somma coincide con l'area del triangolo; in caso affermativo, il punto è interno (o lungo un lato, caso che in questo problema andrebbe distinto, perché ai fini dell'ammissibilità un punto lungo un lato deve essere considerato come se fosse esterno).

Variabili. Formulato così, il problema si riduce a scegliere uno dei possibili triangoli. La scelta di un triangolo si può rappresentare con una variabile $\tau_{ijk} \geq 0$. Non è neppure necessario che sia binaria.

Vincoli. Un solo triangolo deve essere selezionato:

$$\sum_{(i,j,k) \in T} \tau_{ijk} = 1.$$

I triangoli non vuoti non possono essere selezionati:

$$\tau_{ijk} = 0 \quad \forall (i, j, k) \in T, h \in P : (h \notin T) \wedge |u[i, j, h] + u[j, k, h] + u[k, i, h]| = 3.$$

Obiettivo. L'obiettivo è la massimizzazione dell'area del triangolo scelto:

$$\text{maximize } z = \sum_{(i,j,k) \in T} A_{ijk} \tau_{ijk}.$$

Per come sono scritti i vincoli, risulta ottimale porre a 1 una sola variabile τ tra quelle selezionabili, senza bisogno di imporre che le τ siano binarie.

Classificazione. Il modello risultante è di PL con variabili continue e non-negative. La soluzione calcolata dai solutori è garantita essere un ottimo globale. Nell'esempio dato è anche unica.

Se si volesse evitare di pre-calcolare tutti i dati descritti sopra, si potrebbe dare una formulazione non-lineare del problema.

Soluzione dell'esempio. La soluzione ottima dell'esempio proposto consiste nel triangolo $(2, 3, 6)$ di area 18.